2.9) a) $\phi_j(v) = x_j$.

Pruebo que es f. lineal:

1 -> Tomo v_1 y $v_2 \in V$, siendo $v_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j v_j$ y $v_2 = \sum_{j=1}^{m} y_j v_j$

$\phi_j(v_1+v_2) = x_j + y_j = \phi_j(v_1) + \phi_j(v_2)$ ✓

2 Tomo $v_1 \in V$ y $\lambda \in K$

$\rightarrow \phi_j(\lambda v_1) = \lambda x_j = \lambda . \phi_j(v_1)$ ✓

es f. lineal. ✓

b) $\Phi(v) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(v) e_j$

Pruebo que es TL:

1 -> Tomo $v_1, v_2 \in V$

$\Phi(v_1+v_2) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(v_1+v_2) e_j = \sum_{j=1}^{m} (x_j+y_j) e_j = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j + y_j e_j \rightarrow$

$\rightarrow = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j + \sum_{j=1}^{m} y_j e_j = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$ ✓

2 Tomo $v_1 \in V$ y $\lambda \in K$.

$\Phi(\lambda v_1) = \sum \phi_j(\lambda v_1) e_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda x_j e_j = \lambda . \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = \lambda . \Phi(v_1)$ ✓

Apliqué prop. de sumatorias.

Por lo tanto es TL. ✓

c) Para q' sea isom. debe ser monom. y epim.

Para q' sea monomorfismo $\rightarrow Nu(\Phi) = \{0\}$.

Pruebo esto:

$$Nu(\Phi) = \{0\} \rightarrow \sum_{j=1}^{m} \phi_j(v) e_j = 0 \rightarrow (\phi_1(v), \phi_2(v), \dots, \phi_m(v)) = (0, \dots, 0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \phi_1(v), \dots, \phi_m(v) = 0$$

Por lo tanto $\rightarrow$ como $v = \sum_{j=1}^{m} x_j v_j = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\phi_j(v)}_{=0} v_j$, entonces

$$Nu(\Phi) = \{0\} \rightarrow \Phi \text{ es inyectiva (monom.)}$$

Para ver si es epimorfismo, veo si Φ tiene como imagen todo $\mathbb{K}^m$.

$$\Phi(v) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(v) e_j = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j \rightarrow$$ ~~que tiene la misma forma que~~ $\bar{x}$ Entonces.

$\rightarrow = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m = (x_1, \dots, x_m)$ que es todo $\bar{X} \in \mathbb{K}^m$. Entonces Φ es epimorfismo.

Como es monom. y epimorf. $\rightarrow$ es isomorfismo.

d) Si V tiene dim $= n$, con $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base.

y $\Phi(v) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(v)\, e_j$

como e_j son los canónicas de $\mathbb{K}^n$ ....

Entonces como ya vimos que Φ es isomorfismo, para cualquier K-e.v., este K-e.v es isomorfo a $\mathbb{K}^n$.